



מבוא לאלגוריתמים - בחינת סיכום מועד א'

15/02/02

- בבחינה 4 שאלות.
- משך הבחינה 3 שעות.
- יש לפתור את כל השאלות.
- כל חומר עזר מותר
- בטרם תיגשו לפתרון ודאו כי הטופס מכיל 8 עמודים וארבע שאלות.
- התשובות תכתבנה על גבי טופס המבחן, במידת הצורך אפשר להוסיף דפים נוספים.
- בבחינה 2 שאלות "אמריקאיות". בכל שאלה אמריקאית יתכנו כמה (יותר מ1) תשובות נכונות.
- מספר המחברת שלך הוא: \_\_\_\_\_ .

**בהצלחה!!!**

	שאלה 1
	שאלה 2
	שאלה 3
	שאלה 4
	סך הכל

## שאלה מס' 1 (25 נקודות):

בכביש חוצה האימפריה ישנם  $n$  שערי תשלום. נהג אשר עוצר בשער תשלום מסוים, משלם את תעריף השער, כאשר לכל שער יש תעריף שונה. נהג הנוסע בכביש חייב לעצור לפחות בשער אחד מכל שלושה שערים ולשלם את התעריף באותו שער.

### **דוגמא:**

נניח כי בכביש יש 5 שערים והתעריפים בהם הם:

שער 1 - 5 שקל

שער 2 - 7 שקל

שער 3 - 9 שקל

שער 4 - 1 שקל

שער 5 - 2 שקל

נהג יכול לעצור בשער 3 ולשלם 9 שקל או לעצור בשער 1 ובשער 4 ולשלם 6 שקל (תיתכנה אפשרויות נוספות) וברור שהוא יעדיף את האפשרות השניה.

חברת CNX למכוניות מהירות, מציידת כל אחת ממכוניותיה במחשב דרך ומבקשת להציע לנהג החסכן תוכנה לחישוב סדרת עצירות שתדרוש תשלום מינימלי. בשאלה זו, עליכם לתפקד כמפתחי אלגוריתמים בחברה ולהציע

אלגוריתם לחישוב התשלום המינימלי שידרש.

**שימו לב:** אין צורך לחשב את סדרת השערים עצמה.

1.1 הציעו בעיה חישובית המייצגת את השאלה.

1.2 הציעו, באופן מילולי, רעיון לאלגוריתם.

1.3 הציגו את האלגוריתם הממוצע בעזרת קוד דמה.

1.4 הוכיחו את נכונות האלגוריתם שהצעתם.

1.5 מהי סיבוכיות האלגוריתם שהצעתם? נמקו תשותכם בקצרה.

1.6 האם יתכן אלגוריתם עם סיבוכיות נמוכה יותר?

**שאלה מס' 2 (25 נקודות)**

נניח כי  $A$  הוא וקטור של מספרים שלמים שארכו  $n$ . **היפוך** בוקטור  $A$  הוא זוג אינדקסים  $1 \leq i < j \leq n$  המקיים:  $A[i] > A[j]$ . עליכם להציע אלגוריתם, בסיבוכיות נמוכה ככל האפשר, לפתרון הבעיה הבאה:

**קלט:** מערך  $A$  שאיבריו הם מספרים שלמים.

**פלט:** מספר ההיפוכים ב  $A$ .

2.1 תארו את האלגוריתם באופן מילולי.

2.2 תארו את האלגוריתם בעזרת קוד דמה.

2.3 נמקו את נכונות האלגוריתם.

2.4 מהי סיבוכיות האלגוריתם? נמקו את תשובתכם.

2.5 האם יתכן אלגוריתם יעיל יותר? נמקו תשובתכם.

**שאלה מס' 3 (25 נקודות)**

לאחרונה, נמסר במדור המדעי של "ערבים זוהרים" (עיתון ערב מפוקפק שאין לסמוך על אמינותו) כי התגלה עץ השוואה למיון  $n$  איברים (כמו זה שהגדרנו בהוכחת החסם התחתון למיון) שגבהו הוא  $n\sqrt{n}$ . תחת ההנחה כי הידיעה נכונה, יש לקבוע איזו טענה מן הטענות הבאות נכונה:

- א. אם התגלית נכונה, אזי הסיבוכיות הממוצעת של מיון מהיר תעלה ל  $\Theta(n\sqrt{n})$ .
- ב. אם התגלית נכונה, אזי בטוח שלא קיים אלגוריתם מיון מבוסס השוואות שהסיבוכיות שלו היא נמוכה יותר מ  $\Theta(n\sqrt{n})$ .
- ג. לא יתכן שהתגלית נכונה כי הוכחנו שגבהו של כל עץ השוואה למיון  $n$  איברים הוא  $\Theta(n \log n)$ .
- ד. לתגלית אין שום השפעה על החסם התחתון של  $\Omega(n \log n)$  עבור מיון מבוסס השוואות של  $n$  איברים.
- ה. אם התגלית נכונה, אזי קיים אלגוריתם מיון מבוסס השוואות שהסיבוכיות שלו היא  $O(n\sqrt{n})$ .

**סמנו את התשובות הנכונות ב V ואת התשובות הלא נכונות ב X, בטבלה הבאה:**

ה	ד	ג	ב	א	התשובה
					סמנו אם נכון

**שאלה מס' 4 (25 נקודות):**

אלגוריתם Alg לפתרון בעיית החישה הכתומה (שם הבעיה אינו חשוב) בגודל  $n$ , מפרק את הבעיה ל-32 תת

בעיות שגודלן הוא  $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$ . מחוץ לקריאות הרקורסיביות, האלגוריתם משקיע  $4n^{2.5}$  יחידות זמן נוספות כדי

לקבל פתרון לבעיה המקורית.

יהי  $T(n)$  הזמן הנדרש לפתרון בעיה בגודל  $n$ . ידוע גם כי  $T(1) = 2$ .

3.1 בטא את  $T(n)$  על ידי משואת רקורסיה, עבור  $n > 1$ :

$$T(n) =$$

3.2 עליכם לחשב את  $T(70)$ .

$$T(70) =$$

3.2 הפונקציה  $T(n)$  מקיימת:

א.  $T(n) = \Theta(n^{2.5})$

ב.  $T(n) = O(n^3)$

ג.  $T(n) = \Omega(n^3)$

ד.  $T(n) = \Omega(n^2 \log n)$

ה.  $T(n) = O(n^{2.6})$

**סמנו את התשובות הנכונות ב V ואת התשובות הלא נכונות ב X בטבלה הבאה:**

ה	ד	ג	ב	א	התשובה
					סמנו אם נכון